Σχόλιο (Για προηγούμενο θεώρημα)
$f(I)$ είναι φραγμένο σύνολο
έχουμε $f(I) \subseteq [m, M]$

$\underset{f(x_k)}{''} \quad '' f(x^*)$ με $x_k, x^* \in I$

Απόδειξη
Θεωρούμε το μη κενό σύνολο $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$
Αφού f συνεχής και $I = [a,b] \rightsquigarrow f(I)$ φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}$
Έστω $s^* = \sup f(I)$ και $s_* = \inf f(I)$
Θ.δ.ο. $\exists\, x^*, x_* \in I$ τ.ω. $s^* = f(x^*)$ και $s_* = f(x_*)$
Αφού $s^* = \sup f(I)$, εαν $n \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $s^* - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του $f(I)$

Άρα $\exists\, y_n \in f(I)$ τ.ω. $s^* - \frac{1}{n} < y_n \leq s^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Όμως $y_n = f(x_n)$ για κάποιο $x_n \in I = [a,b]$

$\rightsquigarrow s^* - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow \underbrace{f(x_n) \to s^*}$

Η (x_n) είναι φραγμένη ακολουθία αφού $a \leq x_n \leq b$

Άρα από B-W, $\exists$ υπακολουθία $x_{k_n} \to x^* \in [a,b]$ (1)

$f(x_{k_n}) \to s^*$ (2)

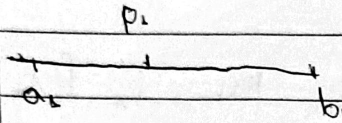
Από συνέχεια της f στο $x^* \overset{(1)(2)}{\Longrightarrow} f(x^*) = s^*$
Άρα το s^* λαμβάνεται
Ομοίως για το s_*

Εντοπισμός Ριζών

Έστω $I=[a,b]$ $a,b\in\mathbb{R}$ $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I
Εάν $f(a)<0<f(b)$ ή $f(a)>0>f(b)$ τότε $\exists\, c\in(a,b)$
τέτοιο ώστε $f(c)=0$.

Απόδειξη

Υποθέτω $f(a)<0<f(b)$ Έστω $I_1=[a_1,b_1]$ με $a_1=a$ $b_1=b$



Θέτω $p_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ Εάν $f(p_1)=0$
Τελειώσαμε $(c=p_1)$

Εάν $f(p_1)\neq 0$ τότε η $f(p_1)>0$ ή $f(p_1)<0$

Εάν $f(p_1)>0$, τότε θέτουμε $a_2=a$ $b_2=p_1$
Εάν $f(p_1)<0$ » » $a_2=p_1$ $b_2=b_1$

Σε κάθε περίπτωση θέτουμε $I_2=[a_2,b_2]$
$I_2 \subseteq I_1$ και $f(a_2)<0$ $f(b_2)>0$

Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία διχοτόμησης, φτιάχνουμε
$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_k$

Σταματάμε εάν για κάποιο $p_k=\dfrac{a_k+b_k}{2}$ έχουμε $f(p_k)=0$

Αν όχι συνεχίζουμε επ. άπειρο
$I_{n+1}\subseteq I_n$
$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]$ $f(a_{n+1})<0$ $f(b_{n+1})>0$

$b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$

$I_{n+1}\subseteq I_n$ $\exists\, c\in I_1$ τέτοιο ώστε $c\in I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$
Αφού $a_n\leq c\leq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε $0\leq c-a_n\leq b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}$

I_n: nested intervals
$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \exists c \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim a_n = c = \lim b_n$
Αφού f συνεχής στο c έχουμε $\lim f(a_n) \overset{\leq 0}{=} f(c) = \lim \overset{\geq 0}{f(b_n)}$

<u>Παράδειγμα</u>
$f(x) = xe^x - 2 \quad I = [0,1]$
$f(0) = -2 < 0 \quad f(1) = e - 2 > 0$

f συνεχής στο $I \longrightarrow \exists\, c \in (0,1)$ τ.ω. $f(c) = 0$

$f(1/2) = 1/2\sqrt{e} - 2 = -1{,}176$ 0   1/2   3/4   1 $f\left(\frac{3}{4}\right) = -0{,}412$

<u>Άσκηση</u>: Ν.δ.ο. το πολυώνυμο $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ έχει τουλάχιστον 2 πραγματικές ρίζες.

Η p είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^4}\right) = +\infty$

Άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ τ.ω. $p(x) < \varepsilon \ \forall x < -M$
Για $\varepsilon = 100 \rightarrow$ Άρα $\exists M < 0$ τέτοιο ώστε $p(M) > 100$

Ομοίως και στο $x \to +\infty$
Άρα $\exists$ $M_- < 0$, $M_+ > 0$ τ.ω. $f(M_-) < 0$

Άρα $p(M_-) > 0 \quad p(0) < 0 \rightsquigarrow \exists\, c \in (M_-, 0)$ τ.ω. $f(c_-) = 0$
$p(0) < 0 \quad p(M_+) > 0 \rightsquigarrow \exists\, c \in (0, M_+)$ τ.ω. $f(c_+) = 0$.
– Πρακτικά Bolzano στο $[0,2]$ και στο $[-2,0]$.

No. Date

Άσκηση: $I=[a,b]$ $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και τέτοιο ώστε $\forall x \in I, \exists y \in I$ τ.ω. $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$
Ν.δ.ο. $\exists c \in I$ τέτοιο ώστε $f(c)=0$

Θέτω $x_1 = a$ $\rightsquigarrow$ $\exists x_2 \in I$ τ.ω. $|f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)|$
$\downarrow$
y

$\rightsquigarrow$ $\exists x_3 \in I$ τ.ω. $|f(x_3)| \leq \frac{1}{2}|f(x_2)| \leq \frac{1}{4}|f(x_1)|$

~~doubling property~~

Φτιάχνουμε έτσι $(x_n) \in I$ τ.ω. $|f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{2}|f(x_n)|$ $x_1 = a$

$\rightsquigarrow |f(x_n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)| \to 0$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\omega^n \to 0$ $|\omega|<1$

$\rightsquigarrow f(x_n) \to 0$

$a \leq x_n \leq b$ Άρα (x_n) φραγμένη. Άρα Από B-W $\exists$ συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n})

$x_{k_n} \to x_\infty$ $\rightsquigarrow$ $f(x_{k_n}) \to f(x_\infty)$
$f(x_{k_n}) \to 0$

Για σπίτι

Άσκηση: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και παίρνει μόνο ρητές τιμές
ν.δ.ο. f σταθερά

Υπόδειξη: Χρήση Θεωρήματος Bolzano Μέσης τιμής:
Έστω $I=[a,b]$, $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Εάν $k \in \mathbb{R}$
τ.ω. $f(a) < k < f(b) \implies c \in (a,b)$ τ.ω. $f(c)=k$

Απόδειξη

Θέτω $g = f - k$. Η g συνεχής στο $[a,b]$, $g(a) < 0 < g(b)$

$\rightsquigarrow$ Από Θ. εντοπισμού ριζών (Bolzano) $\rightsquigarrow$ $\exists c$ τ.ω. $g(c)=0 \iff f(c)=k$

No. Date

Άσκηση

Έστω $I=[a,b]$ $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I με $f(a)<0$ $f(b)>0$
Θέτουμε $W=\{x \in I : f(x)<0\}$ και $w=\sup W$ ν.δ.ο. $f(w)=0$

$a \in W$ Άρα W μη κενό
Επίσης $W \subseteq [a,b] \rightsquigarrow W$ φραγμένο, δηλαδή $\overset{\text{"}}{\sup W} \in \mathbb{R}$ με $a \leq w \leq b$
$\exists\, x_n \in W$ τ.ω. $x_n \to w$

Το sup ενός συνόλου μπορεί να λαμβάνεται ή όχι
Έχω $f(w) \leq 0$
Από συνέχεια της f, το $f(x_n) \to f(w)$

Θ.δ.ο. $f(w)=0$
(Μεάτοπο) Έστω ότι $f(w)<0$ $(w \neq b$ διότι $f(b)>0)$
Τότε $\exists\, V_\delta(w)$ τ.ω. $f(V_\delta(w))<0$ λόγω συνέχειας
Άρα $V_\delta(w) \subseteq W$

Άσκηση Για Σπίτι

① Έστω $I=[0,\pi/2]$ και έστω $f: I \to \mathbb{R}$ $f(x)=\underset{\max}{\sup}\{x^2, \cos x\}$ $x \in I$

Ν.δ.ο. (i) $\exists$ ολικό ελάχιστο x_0 για την f στο I (σημείο)
(ii) x_0 είναι λύση της $\cos x = x^2$

② Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $\lim\limits_{x \to -\infty} f = 0$ $\lim\limits_{x \to \infty} f = 0$

ν.δ.ο. (i) f φραγμένη στο $\mathbb{R}$
(ii) ότι λαμβάνει ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο
(iii) Να βρεθεί παράδειγμα για μια συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία να μην λαμβάνει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο